２０２５年４月入学第１回一般入試

岡山大学大学院環境生命自然科学研究科
(博士前期課程)

数理情報科学学位プログラム 数理データ科学コース

入学試験問題
専門科目

注意

１． 専門科目は，志望する教育研究分野の指定する科目を解答しなさい。教育研究分野の指定する科目は，下記の通りです。指定された科目以外の科目を解答すると無効となります。

コース	教育研究分野	科目名
数理データ科学	応用数理学	応用数理学
	数理データ活用学	
	数理モデル解析学	応用数学
	現象数値解析学	
	統計データ解析学	統計学
	時空間統計学	
	計算機統計学	

２． 専門科目の解答用紙には，解答する科目名および問題番号を記入しなさい。

３． 各専門科目の問題の冒頭に，解答する問題の選択に関する指示がありますから，試験開始後必ず読みなさい。指示された問題選択以外の方法で解答すると無効となります。

応用数理学問題
（数理データ活用学，応用数理学 教育研究分野志願者）

第1問と第2問は全員解答しなさい。第3問と第4問より，1問選択し解答しなさい。
あわせて3問になります。

第1問 応用数理学

以下の各問に答えなさい。

問1 (i) 三角関数 $\cos x$ の $x=0$ でのテイラー展開を x^4 の項まで求めなさい。

(ii) 次の等式をみたす定数 a, b, c を求めなさい。

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos 2x + ax^2 + b}{x^4} = c$$

問2 2変数関数 $f(x,y) = 2x^2y + xy^3 - 5xy$ の極値とそれを与える点をすべて求めなさい。極値はそれが極大値か極小値かも明記しなさい。

問3 集合 D を

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq \sqrt{x^2+y^2} \leq 2\}$$

とするとき，次の2重積分の値を求めなさい。

$$\iint_D \log(x^2+y^2)\,dxdy$$

第 2 問 応用数理学

実数 a に対して，行列

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$$

を考える。以下の各問に答えなさい。

問 1 線形写像 $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ を $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ で定義する。

(i) $\mathrm{Ker} f$ が $\mathbb{R}^3$ の部分空間になることを証明しなさい。

(ii) $a = 1$ のとき，$\mathrm{Ker} f$ の基底を 1 組求めなさい。

問 2 $a = 3$ のとき，行列 A は対角化可能か否か答えなさい。対角化可能な場合は $P^{-1}AP$ が対角行列となる正則行列 P および $P^{-1}AP$ を求めなさい。

第 3 問 応用数理学

以下の各問に答えなさい。

問 1 $y(x)$ についての以下の微分方程式 (i) と (ii) の一般解を各々求めなさい。

(i) $\dfrac{dy}{dx} + 3y = 2x + 1$

(ii) $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 3\dfrac{dy}{dx} + 2y = \cos x$

問 2 $x(t)$, $y(t)$ についての微分方程式の初期値問題

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \qquad x(0) = 4, \quad y(0) = 0$$

を解きなさい。

第 4 問 応用数理学

a, b, c, d, e の 5 つの頂点からなる次のような抽象的単体的複体 X を考える。

$$
\begin{aligned}
X = \{&\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{e\},\\
&\{a,b\}, \{b,c\}, \{a,c\}, \{a,d\}, \{b,d\}, \{c,d\}, \{d,e\},\\
&\{a,b,d\}\}
\end{aligned}
$$

以下の各問に答えなさい。ホモロジーの係数は位数 2 の有限体 $\mathbb{F}_2$ で考えることとする。

問 1 $\dim H_1(X)$ を答えなさい。

問 2 $\dim H_2(X)$ を答えなさい。

問 3 X に 3 個の単体を追加した単体的複体 X' で，$\dim H_2(X') = 1$ となるものを構成したい。どのような単体を付加すれば良いか答え，実際に $\dim H_2(X') = 1$ となっていることを示しなさい。

応用数学問題
（数理モデル解析学，現象数値解析学 教育研究分野志願者）

第１問と第２問は全員解答しなさい。第３問と第４問より，１問選択し解答しなさい。あわせて３問になります。

第１問 応用数学

以下の各問に答えなさい。

問１ (i) 三角関数 $\cos x$ の $x = 0$ でのテイラー展開を x^4 の項まで求めなさい。

(ii) 次の等式をみたす定数 a, b, c を求めなさい。

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos 2x + ax^2 + b}{x^4} = c$$

問２ ２変数関数 $f(x, y) = 2x^2 y + xy^3 - 5xy$ の極値とそれを与える点をすべて求めなさい。極値はそれが極大値か極小値かも明記しなさい。

問３ 集合 D を

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq 2\}$$

とするとき，次の２重積分の値を求めなさい。

$$\iint_D \log(x^2 + y^2) dx dy$$

第 2 問 応用数学

実数 a に対して，行列

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$$

を考える。以下の各問に答えなさい。

問 1 線形写像 $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ を $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ で定義する。

(i) $\mathrm{Ker} f$ が $\mathbb{R}^3$ の部分空間になることを証明しなさい。

(ii) $a = 1$ のとき，$\mathrm{Ker} f$ の基底を 1 組求めなさい。

問 2 $a = 3$ のとき，行列 A は対角化可能か否か答えなさい。対角化可能な場合は $P^{-1}AP$ が対角行列となる正則行列 P および $P^{-1}AP$ を求めなさい。

第 3 問 応用数学

以下の各問に答えなさい。

問 1 $y(x)$ についての以下の微分方程式 (i) と (ii) の一般解を各々求めなさい。

(i) $\dfrac{dy}{dx} + 3y = 2x + 1$

(ii) $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 3\dfrac{dy}{dx} + 2y = \cos x$

問 2 $x(t), y(t)$ についての微分方程式の初期値問題

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \qquad x(0) = 4, \ \ y(0) = 0$$

を解きなさい。

第 4 問 応用数学

テイラー展開可能な関数 $f(x)$ の導関数に対する差分近似式は，近似したい格子点における $f(x)$ のテイラー展開とそれらの線形結合を考えることで構成できる。格子間隔を h とし，i 番目の格子点 $x = ih$ における f の値を f_i，$f' \equiv \dfrac{df}{dx}$ の値を f'_i，$f'' \equiv \dfrac{d^2 f}{dx^2}$ の値を f''_i，$f^{(3)} \equiv \dfrac{d^3 f}{dx^3}$ の値を $f_i^{(3)}$ などと表す。たとえば，

$$f_{i\pm1} = f_i \pm h f'_i + \frac{1}{2!}h^2 f''_i \pm \frac{1}{3!}h^3 f_i^{(3)} + \cdots, \tag{1}$$

$$f_{i\pm2} = f_i \pm (2h) f'_i + \frac{1}{2!}(2h)^2 f''_i \pm \frac{1}{3!}(2h)^3 f_i^{(3)} + \cdots, \tag{2}$$

$$f'_{i\pm1} = f'_i \pm h f''_i + \frac{1}{2!}h^2 f_i^{(3)} \pm \frac{1}{3!}h^3 f_i^{(4)} + \cdots \tag{3}$$

（複号同順）である。

γ, a, b を定数として，関係式

$$\gamma f'_{i-1} + f'_i + \gamma f'_{i+1} = a\frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2h} + b\frac{f_{i+2} - f_{i-2}}{4h} \tag{4}$$

を考える。以下の各問に答えなさい。

問 1 式 (4) で $\gamma = 0$ とした場合を考える。

(i) $\gamma = 0$ とした式 (4) に式 (1) と式 (2) を代入し，a と b の関係式を 2 つ導きなさい。

(ii) (i) の 2 つの関係式から定まる a と b の値を用いると，$\gamma = 0$ とした式 (4) が 4 次の陽的差分近似式を与えることを示しなさい。

問 2 式 (4) で $b = 0$ とした場合を考える。

(i) $b = 0$ とした式 (4) に式 (1) と式 (3) を代入し，γ と a の間に成立する関係式を 2 つ導きなさい。

(ii) (i) の 2 つの関係式から定まる γ と a を用いると，$b = 0$ とした式 (4) が陰的差分近似式を与えることを示しなさい。この差分近似式が 4 次精度であることを確かめるため，$f_{i+k} = (kh)^n$ と $f'_{i+k} = n(kh)^{n-1}$（ただし $n = 1$ のときは $f'_{i+k} = 1$ とする）を差分近似式に代入して，n が 4 以下の自然数で等号が成りたつことを示しなさい。

統計学問題

（統計データ解析学, 時空間統計学, 計算機統計学 教育研究分野志願者）

第 1 問〜第 4 問より, 3 問選択し解答しなさい。

第 1 問　統計学

連続確率変数 X が以下の密度関数 $f(x)$ をもつとする。ただし，c は定数である。

$$f(x) = \begin{cases} cx^2(1-x) & (0 \leq x \leq 1) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

次の問 1〜問 4 に答えよ。

問 1　定数 c の値を求めよ。

問 2　X の累積分布関数 $F(x)$ $(0 \leq x \leq 1)$ を求めよ。

問 3　X の期待値 $E(X)$，分散 $V(X)$ を求めよ。

問 4　X の中央値は期待値より大きく最頻値（モード）より小さいことを示せ。

第2問　統計学

繰り返し数 r が等しい一元配置法を考える。要因 A は a 個の水準 $A_1, A_2, \ldots, A_a$ からなるとする。ここに，r, a はともに 2 以上の整数である。いま，水準 A_i に対して X_{ij} が以下の式に従って観測されたとする。

$$X_{ij} = \mu + \alpha_i + \varepsilon_{ij} \quad (i = 1, 2, \ldots, a; j = 1, 2, \ldots, r)$$

ただし，μ, α_i は定数とし，$\displaystyle\sum_{i=1}^{a} \alpha_i = 0$ の関係が成り立つ。

また，$\varepsilon_{ij} \overset{i.i.d.}{\sim} N(0, \sigma^2)$ であり，$\bar{X}_{i\cdot} = \dfrac{1}{r}\displaystyle\sum_{j=1}^{r} X_{ij}$，　$\bar{\bar{X}} = \dfrac{1}{ar}\displaystyle\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{r} X_{ij}$ の関係が成り立つ。次の問 1～問 4 に答えよ。

問 1　総平方和を $S_T = \displaystyle\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{r}(X_{ij} - \bar{\bar{X}})^2$，　A 間平方和を $S_A = r\displaystyle\sum_{i=1}^{a}(\bar{X}_{i\cdot} - \bar{\bar{X}})^2$，誤差平方和を $S_E = \displaystyle\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{r}(X_{ij} - \bar{X}_{i\cdot})^2$ とするとき，$S_T = S_A + S_E$ が成り立つことを示せ。

問 2　誤差平方和 S_E の期待値を a, r, σ^2 を用いて表せ。

問 3　次の表は，ビニールハウスで栽培しているある果物の季節ごとの収穫量をまとめた結果である。なお，収穫は各々の季節において 5 回ずつ行っている。

季節	収穫量 (kg)					合計	平均
春	55	54	61	53	52	275	55
夏	59	61	60	57	68	305	61
秋	63	56	50	50	61	280	56
冬	69	70	69	56	56	320	64
					計	1180	

この収穫量のデータに対し，季節を要因 A と考えて，誤差平方和を求めると 480 となる。以下の分散分析表を完成させるために，（ア）から（ク）に当てはまる値を求めよ。

変動	平方和	自由度	平均平方	F 比
要因 A	(ア)	(ウ)	(カ)	(ク)
残差	480	(エ)	(キ)	
計	(イ)	(オ)		

(第 2 問は次のページに続く)

問4　問3のデータにおいて，季節の違いによる収穫量の差が認められるか。5%の有意水準で判定せよ。ただし，有意性の判定には F 分布表を利用してよい。

F 分布表（分子の自由度 ϕ_1，分母の自由度 ϕ_2 に対する上側確率 5% 点）

ϕ_2 \ ϕ_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	161.45	199.50	215.71	224.58	230.16	233.99	236.77	238.88	240.54	241.88	242.98
2	18.51	19.00	19.16	19.25	19.30	19.33	19.35	19.37	19.38	19.40	19.40
3	10.13	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.89	8.85	8.81	8.79	8.76
4	7.71	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.09	6.04	6.00	5.96	5.94
5	6.61	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82	4.77	4.74	4.70
6	5.99	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.21	4.15	4.10	4.06	4.03
7	5.59	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.79	3.73	3.68	3.64	3.60
8	5.32	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.50	3.44	3.39	3.35	3.31
9	5.12	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.29	3.23	3.18	3.14	3.10
10	4.96	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22	3.14	3.07	3.02	2.98	2.94
11	4.84	3.98	3.59	3.36	3.20	3.09	3.01	2.95	2.90	2.85	2.82
12	4.75	3.89	3.49	3.26	3.11	3.00	2.91	2.85	2.80	2.75	2.72
13	4.67	3.81	3.41	3.18	3.03	2.92	2.83	2.77	2.71	2.67	2.63
14	4.60	3.74	3.34	3.11	2.96	2.85	2.76	2.70	2.65	2.60	2.57
15	4.54	3.68	3.29	3.06	2.90	2.79	2.71	2.64	2.59	2.54	2.51
16	4.49	3.63	3.24	3.01	2.85	2.74	2.66	2.59	2.54	2.49	2.46
17	4.45	3.59	3.20	2.96	2.81	2.70	2.61	2.55	2.49	2.45	2.41
18	4.41	3.55	3.16	2.93	2.77	2.66	2.58	2.51	2.46	2.41	2.37
19	4.38	3.52	3.13	2.90	2.74	2.63	2.54	2.48	2.42	2.38	2.34
20	4.35	3.49	3.10	2.87	2.71	2.60	2.51	2.45	2.39	2.35	2.31
21	4.32	3.47	3.07	2.84	2.68	2.57	2.49	2.42	2.37	2.32	2.28
22	4.30	3.44	3.05	2.82	2.66	2.55	2.46	2.40	2.34	2.30	2.26

ϕ_2 \ ϕ_1	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
1	243.91	244.69	245.36	245.95	246.46	246.92	247.32	247.69	248.01	248.31	248.58
2	19.41	19.42	19.42	19.43	19.43	19.44	19.44	19.44	19.45	19.45	19.45
3	8.74	8.73	8.71	8.70	8.69	8.68	8.67	8.67	8.66	8.65	8.65
4	5.91	5.89	5.87	5.86	5.84	5.83	5.82	5.81	5.80	5.79	5.79
5	4.68	4.66	4.64	4.62	4.60	4.59	4.58	4.57	4.56	4.55	4.54
6	4.00	3.98	3.96	3.94	3.92	3.91	3.90	3.88	3.87	3.86	3.86
7	3.57	3.55	3.53	3.51	3.49	3.48	3.47	3.46	3.44	3.43	3.43
8	3.28	3.26	3.24	3.22	3.20	3.19	3.17	3.16	3.15	3.14	3.13
9	3.07	3.05	3.03	3.01	2.99	2.97	2.96	2.95	2.94	2.93	2.92
10	2.91	2.89	2.86	2.85	2.83	2.81	2.80	2.79	2.77	2.76	2.75
11	2.79	2.76	2.74	2.72	2.70	2.69	2.67	2.66	2.65	2.64	2.63
12	2.69	2.66	2.64	2.62	2.60	2.58	2.57	2.56	2.54	2.53	2.52
13	2.60	2.58	2.55	2.53	2.51	2.50	2.48	2.47	2.46	2.45	2.44
14	2.53	2.51	2.48	2.46	2.44	2.43	2.41	2.40	2.39	2.38	2.37
15	2.48	2.45	2.42	2.40	2.38	2.37	2.35	2.34	2.33	2.32	2.31
16	2.42	2.40	2.37	2.35	2.33	2.32	2.30	2.29	2.28	2.26	2.25
17	2.38	2.35	2.33	2.31	2.29	2.27	2.26	2.24	2.23	2.22	2.21
18	2.34	2.31	2.29	2.27	2.25	2.23	2.22	2.20	2.19	2.18	2.17
19	2.31	2.28	2.26	2.23	2.21	2.20	2.18	2.17	2.16	2.14	2.13
20	2.28	2.25	2.22	2.20	2.18	2.17	2.15	2.14	2.12	2.11	2.10
21	2.25	2.22	2.20	2.18	2.16	2.14	2.12	2.11	2.10	2.08	2.07
22	2.23	2.20	2.17	2.15	2.13	2.11	2.10	2.08	2.07	2.06	2.05

第３問　統計学

成功確率 $p\ (0<p<1)$ の独立な n 回のベルヌーイ試行における成功回数 X の分布，すなわち２項分布について，次の問１～問４に答えよ。

問１　$X=x$ を観測したとき，対数尤度関数 $\ell(p;x)$ を n,p,x の式で表せ。

問２　$x\neq 0,n$ のとき，問１の対数尤度関数 $\ell(p;x)$ の p の関数としての増減を調べ，p の最尤推定量が $\hat{p}=\dfrac{x}{n}$ と表されることを示せ。

問３　$E\left[\{\ell'(p;X)\}^2\right]$ および $E\{-\ell''(p;X)\}$ をそれぞれ n,p の式で表し，両者が一致することを示せ。ただし，$'$ は p に関する微分を表す。

問４　問３で求めた式はフィッシャー情報量と呼ばれる。これを用いて，p の最尤推定量 $\hat{p}=\dfrac{X}{n}$ は p の不偏かつ有効推定量であることを示せ。

第４問　統計学

p 変量，n 個の観測をもつデータに対して階層的クラスター分析を行う。非類似度としてユークリッド距離を用い，クラスター間の非類似度の計算には最短距離法を用いる。なお，各ステップでのクラスター間の非類似度に等しいものはないとする。

K 個のクラスターがあり（$K \leq n$），a クラスターと b クラスターの非類似度を s_{ab} とする。いま，a クラスターと b クラスターを統合して新しい c クラスターを作り，$K-1$ 個のクラスターになったステップを考える。ここで，a クラスターと他の任意の m クラスター，b クラスターと他の任意の m クラスターとの間の非類似度をそれぞれ s_{am}, s_{bm} とする。また，統合された c クラスターと他の任意の m クラスターとの間の非類似度を s_{cm} とする。次の問 1〜問 3 に答えよ。

問 1　s_{cm} を s_{am}, s_{bm} を用いて表せ。

問 2　次のステップで統合されるクラスター間の非類似度は，今考えているステップで統合されたクラスター間の非類似度より大きくなることを示せ。

問 3　$n = 4$ とし，観測それぞれを $C1, C2, C3, C4$ とする。その観測間の非類似度を計算したところ以下のようになった。

	$C1$	$C2$	$C3$
$C2$	1.0		
$C3$	5.0	4.2	
$C4$	2.2	2.0	3.2

デンドログラムを作成せよ。