２０２４年１０月入学，２０２５年4月入学

大学院環境生命自然科学研究科 博士前期課程 物理科学コース

試験問題　＜一般入試＞

専　門　科　目

物　理　学

注意事項

1　解答はじめの合図があるまでは，注意事項を読むだけで，問題冊子や解答用紙等に触れてはいけません。

2　問題冊子は１冊，解答用紙は４枚，下書き用紙は４枚です。

3　すべての解答用紙に受験番号を記入してください。

4　各問題の解答は，それぞれ指定された解答用紙に記入してください。

5　解答用紙のホッチキスは，外さないでください。

6　試験終了後，問題冊子と下書き用紙は必ず持ち帰ってください。

２０２４年１０月入学，２０２５年４月入学
大学院環境生命自然科学研究科 博士前期課程　物理科学コース
試験問題　＜一般入試＞

【試験科目：専門科目（物理学）】

第１問

図１に示すように，質量Mの箱型の物体Ａが滑らかな床の上にある。物体Ａの右上には，質量が無視できる滑車Ｐが繋がっている。質量mのオモリＢとＣが伸び縮みしない糸に滑車Ｐを通じて繋がっている。オモリＢは，物体Ａの水平な滑らかな上面を動くことができる。オモリＣは，物体Ａから離れることなく，その垂直な側面に沿って滑らかに動くことができる。最初物体Ａは床の上で固定され，オモリＢとＣは物体Ａに対して固定されている。

時刻$t=0$で，オモリＢとＣの固定を外したところ，オモリＢは右側に動き，オモリＣは鉛直下側に動きだした。時刻tでオモリＢが物体Ａに対して右側に動いた距離を x，このときの速度を$\dot{x}$とする。重力加速度をgとし，オモリＢとＣが運動している間，糸はたるんでいないものとして，次の問いに答えよ。

(1) オモリＢとＣのそれぞれの運動エネルギーT_BとT_Cを求めよ。
(2) それぞれの位置エネルギーU_BとU_Cを求めよ。ここで，それぞれの位置エネルギーの基準は，オモリＢとＣが時刻$t=0$の時にあった位置とする。
(3) オモリＢとＣについてのラグランジアンLを求め，ラグランジュ方程式から，オモリＢの加速度 $\ddot{x}$を求めよ。
(4) このときの糸の張力Sを求めよ。
(5) オモリＢが物体Ａの上面を距離dだけ動いたときの時刻t_1を求めよ。ただし，オモリＢは滑車Ｐには衝突しておらず，オモリＣは床についていない。

次に，物体Ａの固定を外し，物体Ａも動けるようにした。時刻$t=0$で，オモリＢとＣの固定を外すと同時に，物体Ａに右方向に一定の力Fを加えて物体Ａを右側に動かした。物体Ａが時刻tにおいて最初の位置から右側に動いた距離をX，このときの速度を$\dot{X}$とし，オモリＢが物体Ａに対して右側に動いた距離をx，オモリＢの物体Ａに対する速度を$\dot{x}$とする。物体ＡとオモリＢとＣが運動している間，糸はたるんでおらず，オモリＣは物体Ａの側面から離れていなかった。次の問いに答えよ。

(6) 物体Ａ，オモリＢとＣのそれぞれの運動エネルギーT_A，T_B，T_Cを求めよ。
(7) 問(2)の結果を使い，物体ＡとオモリＢとＣに関するラグランジアンLを求めよ。ここ

で，物体Aの位置エネルギーを $U_A = -FX$ とする。

(8) ラグランジュ方程式を X と x についてそれぞれ求め，物体Aの加速度 $\ddot{X}$ と，オモリBの物体Aに対する加速度 $\ddot{x}$ をそれぞれ求めよ。

(9) 物体Aが右側に動くための力 F の条件を求めよ。

(10)　時刻$t=0$で，加える力を$F=0$とすると，物体Aは左側に動き始める。このとき，オモリCが距離 h だけ落下する間に，物体Aが動いた距離ℓを求めよ。

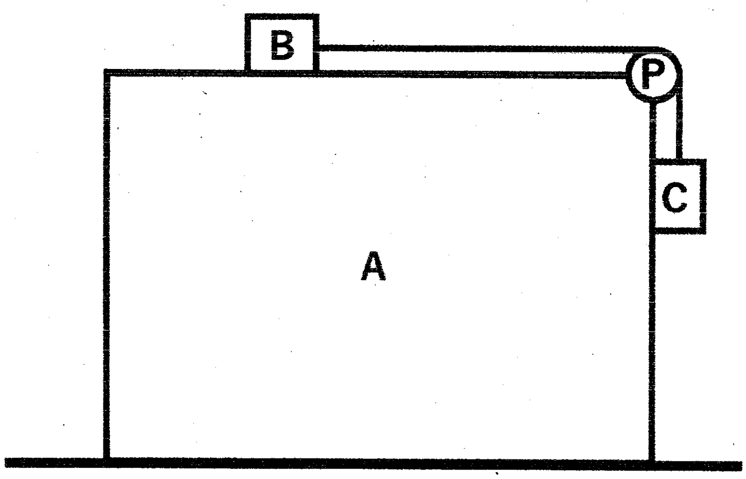

図 1

２０２４年１０月入学，２０２５年４月入学
大学院環境生命自然科学研究科 博士前期課程　物理科学コース
試験問題　＜一般入試＞

【試験科目：専門科目（物理学）】

第２問

真空中で極板面積 A，間隔 d の平行平板コンデンサーを電池と接続して充電し，$\pm q$ の電荷を与える（初期状態）。真空の誘電率を ε_0 とする。極板端の影響を無視する。以下の問いに答えよ。

(1)　コンデンサーによる電場 $\boldsymbol{E}$ をガウスの法則から求めたい。解答用紙に積分領域を図示し，電場 $\boldsymbol{E}$ の導出に至る経緯を説明せよ。図は模式的で良い。解答には ε_0，A，q を用いよ。
(2)　電極間の電位差からコンデンサーの静電容量 C を求めよ。解答には ε_0，d，A を用いよ。
(3)　コンデンサーの静電エネルギーを求めよ。解答には ε_0，d，A，q を用いよ。

初期状態のコンデンサーから電池を外し，図 2 のように極板間に極板と同形の厚さ d，誘電率 ε の板を入れる。極板と誘電体板の間の摩擦は無視する。

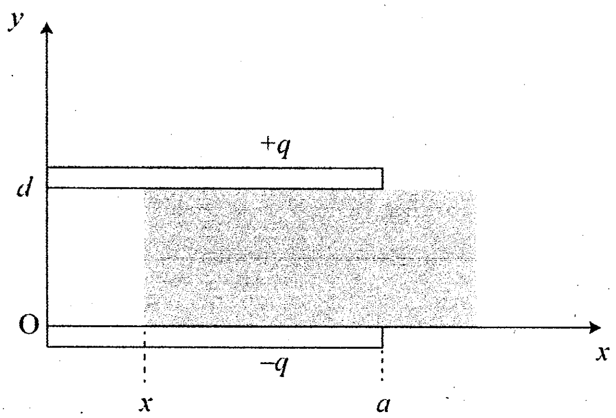

図２

(4)　極板の長さを a，極板間が真空となっている部分の長さを x とし，静電容量を求めよ。
(5)　この誘電体板を右の方へ引き出すときに，抵抗して板を引き戻そうとする力を求めよ。

次に，極板間隔が一方の端で $d-\delta$，他方の端で $d+\delta\ (\delta \ll d)$ のように極板がわずかに傾いたコンデンサーを考える（図 3)。ここで極板の幅（紙面に垂直方向）を b とする。また，

電場の向きは一様とみなす。

(6)　任意の点 x での極板間隔を求めよ。
(7)　微小部分 dx の静電容量 dC を求めよ。
(8)　極板が傾いたコンデンサーの静電容量を求め，平行平板コンデンサー（$\delta = 0$）の静電容量と比較せよ。このとき，コンデンサーを微小コンデンサー（静電容量 dC）の並列接続とみなし，$\log\frac{1+x}{1-x} \cong 2\left(x + \frac{x^3}{3}\right)$ の関係を用いて良い。

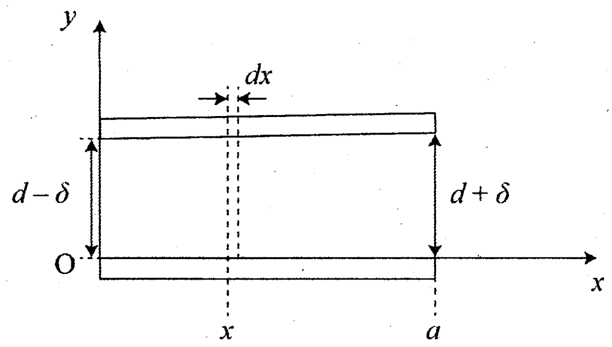

図 3

２０２４年１０月入学，２０２５年４月入学
大学院環境生命自然科学研究科 博士前期課程　物理科学コース
試験問題　＜一般入試＞

【試験科目：専門科目（物理学）】

第３問

電子はスピンという固有の角運動量をもち，磁場をかけると二つのエネルギー準位に分裂することが 1922 年の Stern と Gerlach の実験により明らかになった。角運動量をもつということは，電子は固有の磁気モーメント$\boldsymbol{M}$ をもつことを意味する。そして電子の磁気モーメントは，電子の質量 m，電荷 e，および磁気回転比 g (g因子) を用いて次のように書ける。

$$\boldsymbol{M} = -\frac{g\mu_{\mathrm{B}}}{\hbar}\boldsymbol{S}$$

ここで $\mu_{\mathrm{B}} = e\hbar/2m$ はボーア磁子である。電子スピンを表す角運動量演算子 $\boldsymbol{S}$ は関数の形で表すことができないため，行列で表す必要がある。スピンは二つの状態しかないため，任意の状態は $\psi = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ という 2 行 1 列のベクトルで表すことができ，対応する演算子は 2×2 行列となる。今，適切な基底を選ぶことにより，電子スピンを表す演算子の各成分が次のように書けるものとする。

$$S_x = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad S_y = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \qquad S_z = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

以下の問いに答えよ。

(1) S_z の固有値および規格化された固有状態 $\psi_\uparrow$ と $\psi_\downarrow$ を列ベクトルで表せ。ここで，状態 $\psi_\uparrow$ は正の固有値をもち，$\psi_\downarrow$ は負の固有値をもつ固有ベクトルである。

(2) スピン演算子について，次の交換関係 $[A,B] = AB - BA$ および反交換関係 $\{A,B\} = AB + BA$ を計算せよ。

(ア) $[S_x, S_y]$

(イ) $[S^2, S_z]$

(ウ) $\{S_y, S_z\}$

(3) 規格化されたS_yの固有ベクトル ψ_{y+} および ψ_{y-} を求めよ。ここで，ψ_{y+} (ψ_{y-}) はそれぞれ固有値が正 (負) の固有ベクトルである。得られた固有ベクトルを S_z の固有ベクトル $\psi_\uparrow$ および $\psi_\downarrow$ の線形結合により表せ。

次に，電子に外部磁場 $\boldsymbol{B}$ をかけた場合を考える。この場合，電子のハミルトニアン $\mathcal{H}$ は次式のようになる。

$$\mathcal{H} = -\boldsymbol{M} \cdot \boldsymbol{B} = \frac{g\mu_{\mathrm{B}}}{\hbar}(S_x B_x + S_y B_y + S_z B_z)$$

また，時刻 t における任意のスピン状態は，$\psi(t) = \begin{pmatrix} a(t) \\ b(t) \end{pmatrix}$ と表せる。これを (i) 式で表す時間依存のシュレーディンガー方程式に代入することで，系の時間発展を調べることができる。

$$i\hbar \frac{d}{dt}\psi(t) = \mathcal{H}\,\psi(t) \tag{i}$$

これを行列で表すと次のようになる。

$$i\hbar \begin{pmatrix} \dot{a}(t) \\ \dot{b}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a(t) \\ b(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H_{11}a(t) + H_{12}b(t) \\ H_{21}a(t) + H_{22}b(t) \end{pmatrix} \tag{ii}$$

ここで $\dot{a}(t)$ 等に付くドットは $a(t)$ の時間微分を表す。以下の問いに答えよ。

(4) $+z$方向に向いた一様な静磁場 (磁束密度をBとする) 中に電子を置く。このとき電子のハミルトニアンは $\mathcal{H} = \frac{g\mu_{\mathrm{B}}}{\hbar} S_z B$ となる。これを (i) 式に代入し，(ii) 式の形に整えることで $a(t)$ および $b(t)$ が従う時間微分方程式を求めよ。

(5) 導出した微分方程式を解き，初期条件が $\psi(0) = \psi_{y+}$ となる解 $\psi(t)$ を求めよ。

(6) 問 (5) で求めた解 $\psi(t)$ について，S_x，S_y，S_z の期待値 $\langle S_i \rangle\,(i = x, y, z)$ をそれぞれ求めよ。

(7) 問 (6) の結果から，初期条件が $\psi(0) = \psi_{y+}$ となるスピンは角速度 ω_0 で回転運動することがわかる。この角速度 ω_0 を，B，g，μ_{B}，$\hbar$ を用いて表せ。

(8) 外部磁場として $B = 1.1\ \mathrm{T}$ をかけた場合に，角速度 ω_0 の値を計算し，単位とあわせて答えよ。ただし$g = 2.0$，$\hbar = 1.1 \times 10^{-34}\ \mathrm{J \cdot s}$，$\mu_{\mathrm{B}} = 9.3 \times 10^{-24}\ \mathrm{J/T}$ である。

２０２４年１０月入学，２０２５年４月入学
大学院環境生命自然科学研究科 博士前期課程　物理科学コース
試験問題　<一般入試>

【試験科目：専門科目（物理学）】

第４問

N 粒子系の統計力学について考える。この系を温度 T の熱浴に接するカノニカル集団として扱うとき，分配関数 Z は

$$Z = \sum_j e^{-E_j/k_B T}$$

で与えられる。ここで，j は微視的状態を区別するラベル，E_j はそのエネルギー，k_B はボルツマン定数である。以下の問いに答えよ。

(1) 粒子間の相互作用がない場合，エネルギー E_j は $E_j = \sum_{i=1}^{N} \epsilon_{n_i}$ と表せる。ここで，n_i は i 番目の粒子の量子状態を表し，ϵ_{n_i} はそのエネルギーである。このとき，分配関数 Z が

$$Z = z^N$$

と表されることを示し，一粒子分配関数 z の表式を求めよ。ただし，粒子は止まっているものとし，粒子の入れ換えについては考えない。

次に，磁場中に置かれた大きさ $S = 1$ のスピンについて考える。外部磁場の大きさを B とし，磁場の方向を z 軸にとると，ハミルトニアン $\mathcal{H}$ は

$$\mathcal{H} = \frac{g\mu_B}{\hbar} S_z B$$

で与えらえる。ここで，g は g 因子，μ_B はボーア磁子，S_z はスピン演算子の z 成分である。スピンは N 個あり，スピン間の相互作用は考えない。

(2) ハミルトニアン $\mathcal{H}$ の固有値は，小さい方から順に $-\Delta$，0，Δ と表せる。Δ を求めよ。
(3) 一粒子分配関数 z を求めよ。
(4) スピンが固有エネルギー $-\Delta$，0，Δ の状態にある確率 p_0，p_1，p_2 をそれぞれ求めよ。
(5) N 個のスピン系のエントロピー $S(T)$ を求めよ。
(6) 高温極限におけるエントロピーの値を求めよ。

(7) 低温極限におけるエントロピーの漸近形を求めよ。

(8) 問(7)で求めた低温におけるエントロピー $S(T)$ の漸近形は，大きさ $S = 1/2$ のスピンの場合にも同じ形となる。その理由を問(4)の確率と関連付けて議論せよ。