２０２４年１０月入学，２０２５年４月入学

大学院環境生命自然科学研究科 博士前期課程 数理科学コース

試験問題　＜一般入試＞

専　門　科　目

数　学

注意事項

1　解答はじめの合図があるまでは，注意事項を読むだけで，問題冊子や解答用紙等に触れてはいけません。

2　問題冊子は１冊，解答用紙は５枚，下書き用紙は５枚です。

3　すべての解答用紙に受験番号を記入してください。

4　各問題の解答は，それぞれ指定された解答用紙に記入してください。

5　解答用紙のホッチキスは，外さないでください。

6　試験終了後，問題冊子と下書き用紙は必ず持ち帰ってください。

２０２４年１０月入学，２０２５年４月入学
大学院環境生命自然科学研究科　博士前期課程　数理科学コース
試験問題　＜一般入試＞

【試験科目：専門科目（数学)】

問題は全部で７問ある。A 系統（[A-1]〜[A-4]）から３題を選択, B 系統（[B-1]〜[B-3]）からは２題を選択して, 計５題について解答せよ。ただし, 以下の問題文中の $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ は, すべての整数からなる集合, すべての有理数からなる集合, すべての実数からなる集合, すべての複素数からなる集合をそれぞれ表すものとする。

【A 系統】

[A-1] 次の行列

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

について，以下の問いに答えよ。

(1) A の固有値をすべて求めよ。

(2) (1) で求めた固有値それぞれについて，その固有空間の基底を一組求めよ。

(3) A が対角化可能かどうか判定せよ。

(4) A のジョルダン標準形を一つ求めよ。また，$P^{-1}AP$ がそのジョルダン標準形になるような正則行列 P を一つ求めよ。

[A-2] V を有限次元実ベクトル空間，f を V 上の線形変換とし

$$V_1 = \{v \in V \mid f(v) = v\}, \quad V_2 = \{v \in V \mid f(v) = -v\}, \quad V_3 = \{v \in V \mid f(v) = 0_V\}$$

とする。ただし，0_V は V の零ベクトルとする。このとき，以下の問いに答えよ。

(1) $V_1 \cap V_2 = \{0_V\}$ を示せ。

(2) $v_1 \in V_1, v_2 \in V_2, v_3 \in V_3$ に対し，$v_1 + v_2 + v_3 = 0_V$ ならば $v_1 = v_2 = v_3 = 0_V$ であることを示せ。

(3) $f^3 = f$ が成り立つとする。このとき，以下の問いに答えよ。

(i) 任意の $v \in V$ に対し

$$f(v) + f^2(v) \in V_1, \quad f(v) - f^2(v) \in V_2, \quad v - f^2(v) \in V_3$$

が成り立つことを示せ。

(ii) $\operatorname{rank} f = \dim V_1 + \dim V_2$ を示せ。

(iii) $f^2 + f + \mathrm{id}$ は V 上の同型写像であることを示せ。ただし，id は V 上の恒等写像とする。

[A-3] $a > 0, b > 0$ とする。以下の問いに答えよ。

(1) 積分

$$\int_0^\infty e^{-ax}\sin(bx)\,\mathrm{d}x$$

を求めよ。

(2) 積分

$$\int_0^\infty e^{-ax}\sin^3 x\,\mathrm{d}x$$

を求めよ。

[A-4] $\mathbb{C}$ 上の正則関数 $f(z)$ に対して，実 2 変数の実数値関数 $u(x,y), v(x,y)$ を $f(x+\sqrt{-1}y) = u(x,y) + \sqrt{-1}v(x,y)$ で定める。このとき，以下の問いに答えよ。

(1) $u(x,y) = e^x(x\cos y - y\sin y)$ かつ $v(0,0) = 0$ をみたす正則関数 $f(z)$ を $z = x + \sqrt{-1}y$ を用いて表せ。

(2) (1) の正則関数 $f(z)$ に対して，$|z| < 1$ における $f(z) = \dfrac{1}{3}$ の根の重複度込みの個数を求めよ。

【B 系統】

[B-1] 2 個以上の元を持つ，単位元を持つ可換環 A_1, A_2 についてその直積を $A = A_1 \times A_2$ とおく。以下の問いに答えよ。

(1) A は整域でないことを示せ。

(2) $A^\times = A_1^\times \times A_2^\times$ を示せ。ただし，$A^\times, A_1^\times, A_2^\times$ はそれぞれ環 A, A_1, A_2 の単元の集合を表す。

(3) I を A のイデアルとするとき

$$I_1 = \{a_1 \in A_1 |\ \text{ある}\ a_2 \in A_2\ \text{に対して}\ (a_1, a_2) \in I\}$$

は A_1 のイデアルであることを示せ。

(4) A のイデアル J は $J_1 \times J_2$ の形に表せることを示せ。ただし，J_1 は A_1 のイデアルで，J_2 は A_2 のイデアルである。

[B-2] 自然数 n に対して $\mathbb{R}^n$ で n 次元ユークリッド空間を表し，u_1, u_2 で $\mathbb{R}^2$ の標準座標を表す。C^∞ 写像 $x : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ を

$$x = (u_1 \cos u_2,\ u_1 \sin u_2,\ u_2)$$

と定め，$S = x(\mathbb{R}^2)$ とおく。このとき，以下の問いに答えよ。

(1) x が径数付き曲面であることを示せ。

(2) S の第 1 基本量および第 2 基本量をすべて求めよ。

(3) S が極小曲面であることを示せ。

(4) S の主曲率を求めよ。

[B-3] 以下の問いに答えよ。

(1) $x > 0, y > 0$ に対して $u = xy, v = x^2 - y^2$ とおく。x, y を u, v で表せ。

(2) $\mathbb{R}^2$ 上の 4 つの双曲線 $xy = 1, xy = 2, x^2 - y^2 = 2, x^2 - y^2 = 3$ で囲まれ，第一象限に含まれる閉領域を D とする。積分

$$\iint_D (x^4 - y^4)e^{xy}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

の値を求めよ。