

第1問 応用数学

a を実数とし、行列 A, B, C を

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 2 & a \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 2 & a \end{pmatrix}$$

で定める。以下の各問に答えなさい。

問1 A の行列式を求めなさい。

問2 $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^4$ に対する線型方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ が、 $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 以外の解を持つような a の値を求めなさい。

問3 $\text{Ker } B = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^4 \mid B\mathbf{x} = \mathbf{0}\}$ の基底を1組求めなさい。また、 $a = 2$ に対して、 $\text{Ker } C$ の基底を1組求めなさい。

問4 $a = 1$ とする。 $\text{Ker } B \cap \text{Ker } C$ の次元を求めなさい。

第2問 応用数学

$(x, y) \in \mathbf{R}^2$ とする。以下の各問に答えなさい。

問1 2変数関数 $f(x, y) = x^3 + 2xy - x - 2y$ は \mathbf{R}^2 で極値を持つか判定しなさい。
極値を持つ場合にはさらに、それが極大であるか極小であるかを答え、その値を求めなさい。

問2 曲面 $z = x^2 + y^2$ について、 $z \leq a^2$ の部分の面積 S を求めなさい。ただし $a > 0$ とする。

第3問 応用数学

以下の各問に答えなさい。

問1 次の微分方程式の一般解を求めなさい。ただし、 $y' = dy/dx$, $y'' = d^2y/dx^2$ 等とする。

$$(1) \quad y'' - y = 1 + x + x^2 \qquad (2) \quad y''' - y' = x^2$$

問2 次の初期値問題の解を求めなさい。ただし、 $x' = dx/dt$, $y' = dy/dt$ とする。

$$\begin{cases} x' = x + y \\ y' = -x + y \end{cases}, \quad x(0) = 1, y(0) = 1$$