２０２３年４月入学

大学院環境生命自然科学研究科 博士前期課程 物理科学講座

試験問題　＜一般入試＞

専　門　科　目

物　理　学

注意事項

1　解答はじめの合図があるまでは，注意事項を読むだけで，問題冊子や解答用紙等に触れてはいけません。

2　問題冊子は１冊，解答用紙は５枚，下書き用紙は４枚です。

3　すべての解答用紙に受験番号を記入してください。

4　各問題の解答は，それぞれ指定された解答用紙に記入してください。

5　解答用紙のホッチキスは，外さないでください。

6　試験終了後，問題冊子と下書き用紙は必ず持ち帰ってください。

２０２３年４月入学
大学院環境生命自然科学研究科 博士前期課程　物理科学講座
試験問題　＜一般入試＞

【試験科目：専門科目（物理学）】

第１問

ばねによって結ばれた2つの質点の放物運動を考える。2つの質点の質量をm_1およびm_2，位置ベクトルを$\boldsymbol{r}_1$および$\boldsymbol{r}_2$とする。ばね定数を$k\ (>0)$，ばねの自然長をℓ_0 として，ばねの伸びは$\xi = |\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2| - \ell_0$ で表される。図1のように，水平方向にx軸を，鉛直上向き方向にy軸をとる直交座標系を考え，時刻 $t=0$ における2つの質点の重心座標を原点にとる。ここで，連結した2つの質点を $t=0$ において，重心速度$\boldsymbol{v}_0 = (v_{x0}, v_{y0})$をもって原点から斜方投射した。重力加速度ベクトルを$\boldsymbol{g} = (0, -g)$とし，ばねの質量，および空気抵抗は無視できるとする。また，ばねは質点間を結ぶ方向にのみ微小変形し，2つの質点はxy平面内のみを運動する。次の各問いに答えよ。

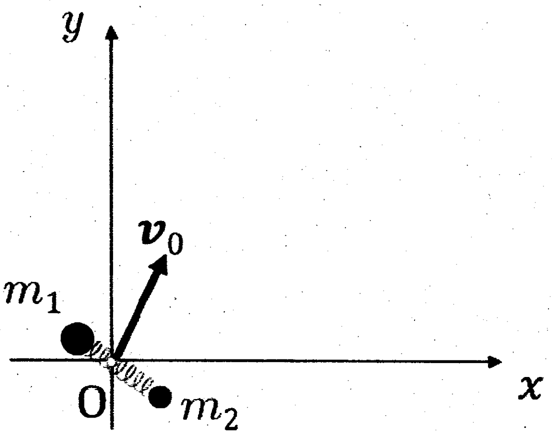

図1

(1) それぞれの質点の運動方程式を示せ。

(2) 2つの質点について，重心運動の運動方程式，および相対運動$\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2$ の運動方程式を示せ。

(3) 2つの質点の相対運動について考える。簡単のため，質点間の方向にX軸をとる1次元座標を考え，2つの質点の座標をそれぞれX_1およびX_2とする。換算質量μを$1/\mu = 1/m_1 + 1/m_2$，固有角振動数を$\omega_0 = \sqrt{k/\mu}$ により定義し，$t=0$ での相対距離が$X_1 - X_2 = \ell_0$，2つの質点間における初速度のX方向での成分差がv_{X0}であるとして，$X_1 - X_2$の時間変化を求めよ。

(4) 2つの質点の重心運動について考える。射出後の重心の最高到達点でのy座標をH，落下点でのx座標をRとして，HおよびRを求めよ。また，xy平面における重心の軌跡を求め，そのy座標をH，R，xを用いて表せ。ただし，落下点の導出において，ばねの大きさは無視できるとする。

(5) 問(3)および問(4)の結果に基づき，この2質点の放物運動を定性的に説明せよ。

(6) 問(4)の放物軌道上の点(x, y)と放物軌道の対称軸$x = R/2$ 上にある任意の点P$(R/2, Y)$との距離(ただし$Y \geq 0$とする) について考える。2点間の距離をDとすると，対称性から，

$$D^2(x) = D_0^2 + \alpha \left(x - \frac{R}{2}\right)^2 + \beta \left(x - \frac{R}{2}\right)^4$$

の関係が成り立つ。ここで右辺第一項はxのゼロ次の項を表し，$x = R/2$上での放物軌道までの距離から，$D_0^2 = (H - Y)^2$ である。

$$\alpha = 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{4H}{R}\right)^2 + \frac{8YH}{R^2}$$

$$\beta = \left(\frac{4H}{R^2}\right)^2$$

であることを示せ。

(7) 放物軌道上の点(x, y)と点Pとの最短距離はYの値に依存し，ある高さY_cを境にして，$Y \geq Y_c$においては最短距離を与えるx座標が1つ，$Y < Y_c$においては最短距離を与えるx座標が2つ存在する。Y_cをHおよびRを用いて求めよ。また，$Y \geq Y_c$，および$Y < Y_c$の場合について，最短距離を与える放物軌道上の点(x_c, y_c)をH，R，Yを用いて求めよ。

(8) 点Pと放物軌道との距離Dをxの関数とし，(a) $Y \geq Y_c$，および (b) $Y < Y_c$ について$D(x)$のグラフの概形を図示せよ。また，(c) x_cをYの関数として，そのグラフの概形を図示せよ。さらに，点Pを中心に持ち放物軌道に収まる円を考え，その半径とY_cとの関係から，(a) - (c)で示したグラフを定性的に説明せよ。

２０２３年４月入学
大学院環境生命自然科学研究科 博士前期課程　物理科学講座
試験問題　＜一般入試＞

【試験科目：専門科目（物理学）】

第２問

図２のように，起電力 V の電池，電気抵抗 R の抵抗器，自己インダクタンス L のコイル，電気容量 C のコンデンサからなる回路がある。スイッチ S は a 側，または b 側に切り換えることができる。以下の各問いに答えよ。

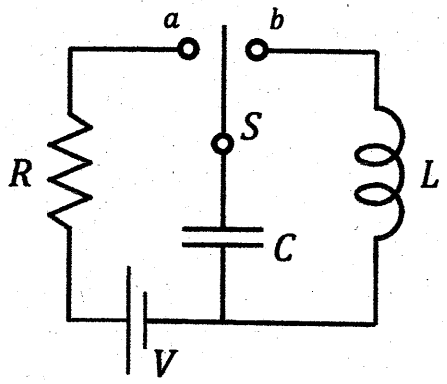

図２

(1) コンデンサに電荷が蓄えられていない状態でスイッチ S を a 側に入れてコンデンサの充電を開始した。このときを時刻 $t=0$ とし，コンデンサに蓄えられる電荷 $Q(t)$ が満たす方程式を示せ。

(2) $Q(t)$を求め，その時間変化を図示せよ。

(3) 十分に時間が経った後，スイッチ S を b 側に切り換えた。この時刻を新たに $t=0$ とし，回路に流れる電流 $I(t)$ が満たす方程式を示せ。

(4) 問(3)の方程式を解き $I(t)$ の固有周波数を求めよ。

(5) コイルに直列に，抵抗 r をつなぐ場合を考える。問(3)と同様にコンデンサに十分電荷が溜まった後スイッチを b 側に切り換えるとき，電流 $I(t)$ が満たす方程式を示せ。

(6) 問(5)の方程式を解くと，r が小さいときは電流が振動するが，抵抗の値が r_0 以上では振動が見られなくなる。この r_0 を求めよ。

２０２３年４月入学
大学院環境生命自然科学研究科 博士前期課程　物理科学講座
試験問題　＜一般入試＞

【試験科目：専門科目（物理学）】

第３問

エネルギーEを持つ質量mの粒子の一次元運動を考える。以下の問いに答えよ。ただし$\hbar = \frac{h}{2\pi}$（hはプランク定数）である。

(1) 非相対論的な古典粒子がポテンシャル$V(x)$の中を運動する場合，運動量をpとすると$E = \frac{p^2}{2m} + V(x)$ が成り立つ。エネルギーと運動量の演算子を用いることでシュレディンガー方程式を導出せよ。ただし波動関数を$\psi(x,t)$とする。

(2) 問(1)の波動関数が，$\psi(x,t) = \phi(x)e^{-iEt/\hbar}$ のように時間に依存しない関数$\phi(x)$と時間に依存する関数に分離できたとする。この場合に関数$\phi(x)$が

$$\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}\phi(x) + [E - V(x)]\phi(x) = 0$$

を満たすことを示せ。

以下では，問(2)で導出した時間に依存しないシュレディンガー方程式を用いる。以下で示す長方形のポテンシャル障壁に粒子が$x = -\infty$より入射したとする。

$$V(x) = \begin{cases} 0 & (x < 0) \\ V_0 & (0 < x < a) \\ 0 & (a < x) \end{cases}$$

ここで V_0, a は正の定数とする。

(3) $0 < V_0 < E$の場合を考える。ここで波動関数は，$x < 0$で$\phi_1(x) = e^{ik_1x} + Re^{-ik_1x}$，$0 < x < a$で$\phi_2(x) = Ae^{ik_2x} + Be^{-ik_2x}$，$a < x$で $\phi_3(x) = Te^{ik_1x}$ とする。

(a) $x = 0, x = a$での接続条件を考慮し，透過率$|T|^2$が

$$\left(1 + \frac{(k_1^2 - k_2^2)^2}{4k_1^2k_2^2}\sin^2(k_2a)\right)^{-1}$$

となることを示せ。

(b) 波数k_1, k_2をEの関数として求めよ。

(c) 量子力学的な運動の場合は $E > V_0$ でも反射は起こるが，ある条件下では全て透過する。透過率が 1 となるEの条件を求めよ。

(4) $0 < E < V_0$の場合を考える。透過率$|T|^2$が

$$\left(1 + \frac{V_0^2}{4E(V_0 - E)}\sinh^2\left(\frac{\sqrt{2m(V_0 - E)}}{\hbar}a\right)\right)^{-1}$$

となることを示せ。

(5) $U_0 = aV_0$と置き，U_0は変えずに，$a \to 0, V_0 \to \infty$ の極限を取ることで，ポテンシャル障壁をデルタ関数にする。

(a) このポテンシャル$V(x)$を，デルタ関数を用いて表せ。

(b) このポテンシャルにおける透過率を導出せよ。ここで$\lim_{x\to 0}\frac{\sinh x}{x} = 1$を用いても良い。

２０２３年４月入学
大学院環境生命自然科学研究科 博士前期課程　物理科学講座
試験問題　＜一般入試＞

【試験科目：専門科目（物理学）】

第４問

結晶の格子振動による比熱について考える。格子点の総数を N とする。アインシュタイン模型では，格子振動を，各格子点が同一の角振動数 ω_{E} で独立に振動する量子力学的な調和振動子と考える。振動方向の自由度 3 を考慮すると，この系は $3N$ 個の量子調和振動子の集合とみなせる。ボルツマン定数を k_{B} として，以下の問いに答えよ。

(1) 格子振動の量子（フォノン）は化学ポテンシャルが $\mu = 0$ のボーズ粒子とみなせる。温度 T における角振動数 ω のエネルギー量子 $\hbar\omega$ の平均占有数を表すボーズ・アインシュタイン分布関数 $f(\omega)$ の表式を答えよ。
(2) 温度 T におけるアインシュタイン模型の全エネルギー $E(T)$ を求めよ。ただし，ゼロ点振動の寄与は無視してよい。
(3) 比熱 $C(T)$ が次式で与えられることを示せ。

$$C(T) = 3Nk_{\mathrm{B}}\left(\frac{\hbar\omega_{\mathrm{E}}/2k_{\mathrm{B}}T}{\sinh(\hbar\omega_{\mathrm{E}}/2k_{\mathrm{B}}T)}\right)^2$$

(4) 低温極限における $C(T)$ の温度依存性を求めよ。

実際の格子振動は，連成振動のように互いに隣り合う格子点の振動が連動して起こるため，格子振動の角振動数 ω は分散を持つ。音波の分散を考慮したデバイ模型では，格子振動の状態密度 $D(\omega)$ は $D(\omega) = A\omega^2$ と表される。以下の問いに答えよ。

(5) 振動モードの総数が $3N$ に等しいという条件 $\int_0^{\omega_{\mathrm{D}}} D(\omega)d\omega = 3N$ からデバイ振動数 ω_{D} を求めよ。
(6) デバイ模型における全エネルギー $E(T)$ が次式で与えられることを示せ。

$$E(T) = 9N\frac{\hbar}{\omega_{\mathrm{D}}^3}\int_0^{\omega_{\mathrm{D}}}\frac{\omega^3}{e^{\hbar\omega/k_{\mathrm{B}}T} - 1}d\omega$$

(7) 低温極限において比熱 $C(T)$ の温度依存性が

$$C(T) = \alpha T^{\gamma}$$

で与えられることを示し，γ の値および定数 α の表式を求めよ。α の表式は積分

が含まれる形で構わない。

(8) 低温極限におけるデバイ模型の比熱（問(7)）とアインシュタイン模型の比熱（問(4)）を比較して，どちらの比熱が大きいかを答え，その物理的理由を説明せよ。ただし，$\omega_E \simeq \omega_D$ とする。