２０２３年４月入学

大学院自然科学研究科 博士前期課程 数理物理科学専攻（数学系）

試験問題　＜一般入試＞

専　門　科　目

数　学

注意事項

1　解答はじめの合図があるまでは，注意事項を読むだけで，問題冊子や解答用紙等に触れてはいけません。

2　問題冊子は１冊，解答用紙は５枚，下書き用紙は３枚です。

3　すべての解答用紙に受験番号を記入してください。

4　各問題の解答は，それぞれ指定された解答用紙に記入してください。

5　解答用紙のホッチキスは，外さないでください。

6　試験終了後，問題冊子と下書き用紙は必ず持ち帰ってください。

２０２３年４月入学
大学院自然科学研究科　博士前期課程　数理物理科学専攻（数学系）
試験問題　＜一般入試＞

【試験科目：専門科目（数学）】

問題は全部で７問ある。A 系統（[A-1]〜[A-4]）から３題を選択，B 系統（[B-1]〜[B-3]）からは２題を選択して，計５題について解答せよ。ただし，以下の問題文中の $\mathbb{R}$，$\mathbb{C}$ は，すべての実数からなる集合，すべての複素数からなる集合をそれぞれ表すものとする。

【A 系統】

[A-1] 以下の実行列 A について考える。

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

(1) A の固有値を求めよ。

(2) (1) の固有値に対する固有空間を求めよ。

(3) A の最小多項式を求めよ。

(4) A のジョルダン標準形を求めよ。

[A-2] n を 2 以上の自然数とし，V を n 次元実ベクトル空間，$v_1, \dots, v_n$ を V の基底とする。また，W を実ベクトル空間とし，$w_1, \dots, w_n$ を W の n 個の元とする。以下の問いに答えよ。

(1) 線形写像 $f : V \to W$ で，$f(v_i) = w_i$ $(i = 1, \dots, n)$ をみたすものがただ一つ存在することを示せ。

(2) f を (1) の線形写像とする。以下の条件のうち，f が単射であることと同値なものを一つ選べ。また，選んだ条件と f が単射であることが同値であることを示せ。

条件 1 W の次元が n 以上である。
条件 2 $w_i \neq 0$ $(i = 1, \dots, n)$ が成立する。
条件 3 $w_1, \dots, w_n$ が相異なる。
条件 4 $w_1, \dots, w_n$ が一次独立である。

[A-3] 以下の問いに答えよ。ここで

$$\operatorname{sech} x = \frac{2}{e^x + e^{-x}}, \qquad x \in \mathbb{R}$$

である。

(1) 等式

$$\int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sech} x \, \mathrm{d}x = 2 \int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}y}{1+y^2} = \pi$$

を示せ。

(2) 積分

$$\int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sech}^2 x \, \mathrm{d}x$$

の値を求めよ。

(3) 積分

$$\int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sech}^3 x \, \mathrm{d}x$$

の値を求めよ。

[A-4] 複素関数 $f(z)$ を $f(z) = z^2 - 4z - 2$ で定めて，$0 \leq t \leq 2\pi$ に対して，$g(t) = |f(e^{it})|^2$ とおく。以下の問いに答えよ。

(1) $g(t)$ を $\cos t$ を用いて表せ。

(2) $0 \leq t \leq 2\pi$ における $g(t)$ の最大値を求めよ。

(3) 閉単位円板 $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}$ における $|f(z)|$ の最大値を求めよ。

【B 系統】

[B-1] $\mathbb{R}[x]$ を $\mathbb{R}$ 上の 1 変数多項式環とし，a を実数とする。以下の問いに答えよ。

(1) $a > 0$ のとき，環同型 $\mathbb{R}[x]/(x^2+a) \cong \mathbb{C}$ を示せ。

(2) 環 $\mathbb{R}[x]/(x^2+a)$ のイデアルの個数を求めよ。

(3) 環同型 $\mathbb{R}[x]/(x^2) \cong \mathbb{R}[x]/(x^2+a)$ が成立するならば，$a=0$ であることを示せ。

[B-2] X と Y を位相空間とし，$f: X \to Y$ を連続写像とする。以下の問いに答えよ。

(1) Y の任意の閉集合 F に対して，f による F の逆像 $f^{-1}(F)$ は X の閉集合になることを示せ。

(2) f が全射で X が弧状連結ならば，Y も弧状連結であることを示せ。

(3) f が全射で X が連結ならば，Y も連結であることを示せ。

(4) f が全射で X がコンパクトならば，Y もコンパクトであることを示せ。

[B-3] 以下の問いに答えよ。ただし，$y = y(x)$ は $\mathbb{R}$ から $\mathbb{R}$ への関数とする。

(1) 微分方程式

$$y'' + y' - 2y = 0$$

の一般解を求めよ。

(2) 初期値問題

$$\begin{cases} y'' + y' - 2y = \sin x, \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 0 \end{cases}$$

を解け。